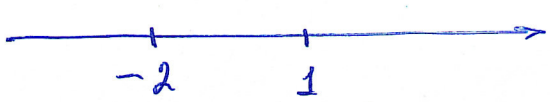
I Решить уравнение

$$|2\sqrt{x}+1-x|+|x-2\sqrt{x}+2|=7$$

Пусть $t = x - 2\sqrt{x}$, тогда

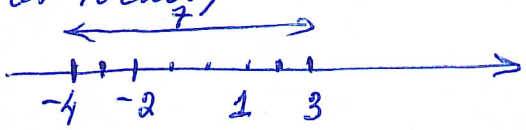
$$|1-t|+|t+2|=7$$

I сп.



Рассмотрим на промежутках, т.е. решим 3 уравнения

II сп Используем геометрический смысл модуля (расстояние от точки)



$|1-t|$ - расстояние от точки 1

$|t+2|$ - расстояние от точки (-2)

Расстояние от крайних точек 7

$$\left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=-4 \end{array}\right.$$

1) $x-2\sqrt{x}-3=0$

$\sqrt{x}=-1$ не существует

$\sqrt{x}=3$

$x=9$

2) $x-2\sqrt{x}+4=0$

$D<0$

решений нет

Ответ: $x=9$

2 $\sqrt{2x^2-8x+25}-\sqrt{x^2-4x+13}=2$

Понятно, что замена, но какая

$x^2-4x=t$

Все равно 2а корня, 2а раза возводим в квадрат

Пусть $t=\sqrt{x^2-4x+13}$ $\quad t\geq 0$

$t^2=x^2-4x+13$

$2t^2=2x^2-8x+26$

$2t^2-1=2x^2-8x+25$

Уравнение примет вид

$\sqrt{2t^2-1}-t=2$

$\sqrt{2t^2-1}=t+2$

$2t^2-1=t^2+4t+4$

$t^2-4t-5=0$

$\left[\begin{array}{l} t=-1 \text{ не подходит} \\ t=5 \end{array}\right.$

$\sqrt{x^2-4x+13}=5$

$x^2-4x+13=25$

$x^2-4x-12=0$

$\left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=-2 \end{array}\right.$

Ответ: $x=6$, $x=-2$

3 $\begin{cases} x^2+xy-2y^2+8x+10y+12=0 \\ x^2+3xy+2y^2-x+y-6=0 \end{cases}$

Решим как квадратное уравнение относительно x

1ур. $x^2+(y+8)x-2y^2+10y+12=0$

$$x_{1,2}=\frac{-(y+8)\pm\sqrt{y^2+16y+64+8y^2-40y-48}}{2}=\frac{-y-8\pm\sqrt{9y^2-24y+16}}{2}=$$

$$=\frac{-y-8\pm\sqrt{(3y-4)^2}}{2}=\frac{-y-8\pm|3y-4|}{2}$$

$$x=\frac{-y-8-3y+4}{2}=-2y-2$$

$$x=\frac{-y-8+3y-4}{2}=y-6$$

2ур. $x^2+(3y-1)x+2y^2+y-6=0$ $\qquad 2y^2+y-6=(y+2)(2y+3)$

$$x^2+(3y-1)x+(y+2)(2y+3)=0$$

По теореме Виета

$$\begin{cases} x_1+x_2=-3y+1 \\ x_1\cdot x_2=(y+2)(2y+3) \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} x=-y-2 \\ x=-2y+3 \end{array}\right.$$

Наша система сводится к 4

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-2y-2 \ (1) \\ x=y-6 \ (2) \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x=-y-2 \ (3) \\ x=-2y+3 \ (4) \end{array}\right. \end{cases}$$

(1) и (3) $-2y-2=-y-2$

$y=0$, тогда $x=-2$

(1) и (4) $-2y-2=-2y+3$

решений нет

(2) и (3) $y-6=-y-2$

$2y=4 \quad y=2 \quad x=-4$

(2) и (4) $y-6=-2y+3$

$3y=9 \quad y=3 \quad x=-3$

Ответ: $(-2;0)$

$(-4;2)$

$(-3;3)$

4 $\begin{cases} x^2-4x+4y+27=0 \\ y^2+2x+8y+10=0 \end{cases}$ I Можно выразить

$$y = \frac{-x^2+4x-27}{4}$$

II Сложим уравнения

$$x^2+2x-4x+4y+8y+y^2+27+10=0$$

$$x^2-2x+y^2+12y+37=0$$ Выделим полные квадраты

$$(x^2-2x+1)+(y^2+12y+36)=0$$

$$(x-1)^2+(y+6)^2=0$$ Сумма положительных чисел равна нулю, когда оба равны 0

$x-1=0$ и $y+6=0$

$x=1$ $y=-6$

Ответ: $x=1$; $y=-6$

5 Найти наименьшее натуральное n для которого верно равенство

$$\sin(n^\circ+80^\circ)+\sin(n^\circ-40^\circ)+\sin(n^\circ+70^\circ)-\cos 25^\circ=0$$

Группируем I и II

$$\sin(n^\circ+80^\circ)+\sin(n^\circ-40^\circ)=2\sin(n^\circ+20^\circ)\cos 60^\circ=2\cdot\frac{1}{2}\sin(n^\circ+20^\circ)=$$

$$=\sin(n^\circ+20^\circ)$$

Продолжаем

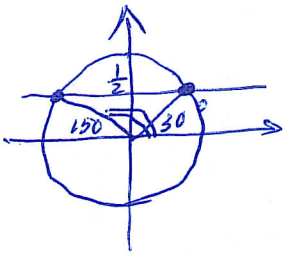
$$\sin(n^\circ+20^\circ)+\sin(n^\circ+70^\circ)=2\sin(n^\circ+45^\circ)\cos 25^\circ.$$

Перепишем уравнение

$$2\sin(n^\circ+45^\circ)\cos 25^\circ-\cos 25^\circ=0 \qquad \cos 25^\circ\neq 0 \text{ сокращаем}$$

$$2\sin(n^\circ+45^\circ)-1=0$$

$$\sin(n^\circ+45^\circ)=\frac{1}{2}$$



$$\left[\begin{array}{l} n^\circ+45^\circ=30^\circ+360^\circ k,\ k\in Z \\ n^\circ+45^\circ=150^\circ+360^\circ k,\ k\in Z \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} n^\circ=-15^\circ+360^\circ k \\ n^\circ=105^\circ+360^\circ k,\ k\in Z \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} n=-15+360k \\ n=105+360k \end{array}\right.$$

$n=-15+360k$, если $k=0$, то $n=-15$, значит $k=1$ и $n=345$

$n=105+360k$, если $k=0$, то $n=105$, это меньше, чем 345

Ответ 105

6 $4\cos^2\frac{x}{2} + \frac{3}{2}\sin x + 5\sin^2\frac{x}{2} = 3$

Пусть $x = 2z$, тогда $4\cos^2 z + \frac{3}{2}\sin 2z + 5\sin^2 z = 3$

$4\cos^2 z + \frac{3}{2}\cdot 2\sin z\cos z + 5\sin^2 z = 3(\cos^2 z + \sin^2 z)$ Однородное уравнение

$\cos^2 z + 3\sin z\cos z + 2\sin^2 z = 0$

1) если $\cos z = 0$, то и $\sin z = 0$, но

$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$

значит $\cos z \neq 0$

$t = \operatorname{tg} z$

$2t^2 + 3t + 1 = 0$

$\left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} z = -1 \\ \operatorname{tg} z = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} z = -\frac{\pi}{4} + \pi k \\ z = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n \end{array}\right.$

Ответ

$\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ x = -2\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + 2\pi n \end{array}\right.$

⑦ $\sin 11x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 7x + \frac{1}{2}\cos 7x = 0$

$$\left\{ \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 7x + \frac{1}{2}\cos 7x = \cos\frac{\pi}{6}\sin 7x + \sin\frac{\pi}{6}\cos 7x = \sin\left(7x+\frac{\pi}{6}\right) \right.$$

$$\sin 11x + \sin\left(7x+\frac{\pi}{6}\right) = 0$$

$$2\sin\left(9x+\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(2x-\frac{\pi}{12}\right) = 0$$

$\sin\left(9x+\frac{\pi}{12}\right) = 0$ или $\cos\left(2x-\frac{\pi}{12}\right) = 0$

$$9x + \frac{\pi}{12} = \pi k \qquad 2x - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$9x = \pi k - \frac{\pi}{12} \qquad 2x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$x = -\frac{\pi k}{108} + \frac{\pi k}{9} \qquad x = \frac{7\pi}{24} + \frac{\pi k}{2}$$

⑧ $81^{\sin^2 x} + 81^{\cos^2 x} = 30$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \\ 81^{1-\sin^2 x} = \dfrac{81}{81^{\sin^2 x}} \end{array} \right\}$$

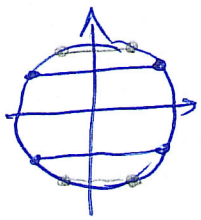
Пусть $81^{\sin^2 x} = t$, тогда

$$t + \frac{81}{t} = 30$$

$$t^2 - 30t + 81 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = 27 \end{array} \right. \qquad \left[\begin{array}{l} \sin^2 x = \frac{1}{4} \\ \sin^2 x = \frac{3}{4} \end{array} \right.$$

$\sin x = \pm\frac{1}{2}$ $\qquad$ $\sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$



Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in Z$

$\left(x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2},\ k \in Z \right)$

9 $\log_4 \log_2 x + \log_2 \log_4 x = 2$

$\log_4 x = y \qquad \log_2 x = 2y$

$\log_4 2y + \log_2 y = 2$

$\log_4 2 + \log_4 y + 2\log_4 y = 2$

$\frac{1}{2} + \log_4 y + 2\log_4 y = 2$

$\frac{1}{2} + 3\log_4 y = 2$

$3\log_4 y = \frac{3}{2}$

$\log_4 y = \frac{1}{2}$

$y = 4^{\frac{1}{2}}$

$y = 2 \qquad \log_4 x = 2$

$x = 4^2 = 16$

Ombem: 16